

# **РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ Алгебраических УРАВНЕНИЙ**





## Система линейных уравнений называется:

- **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение;
- **несовместной**, если она не имеет решений;
- **определенной**, если она имеет единственное решение;
- **неопределенной**, если она имеет более одного решения;
- **однородной**, если все  $b_i=0$ ;
- **неоднородной**, если не все  $b_i=0$ .

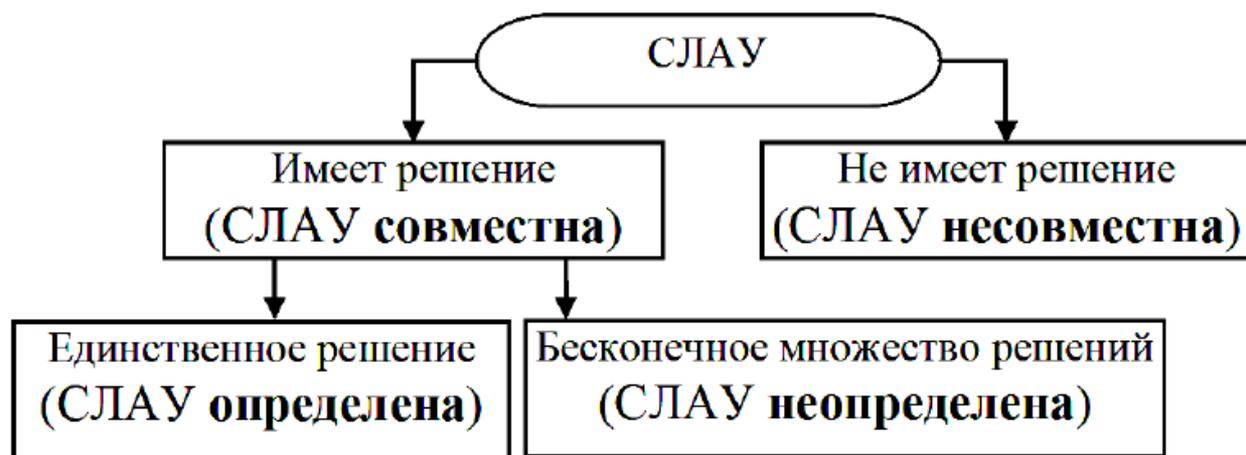


Рис.1. Схема типов решений СЛАУ.





## Вспомним тему: Определители

**Определитель квадратной матрицы** – это число, вычисляемое по определённым правилам.

**Обозначают:**  $|A|$ ,  $\Delta A$ ,  $\det A$ .

Определитель **2-го порядка:**

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Боковая  
диагональ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7$$

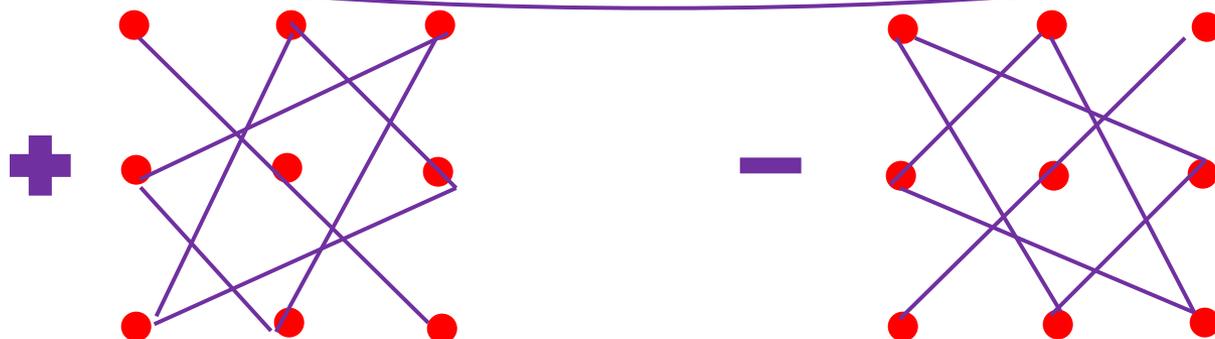
Главная  
диагональ



# Определитель 3-го порядка:

## Правило Саррюса (правило треугольников)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{+} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ \text{-} & a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \end{matrix}$$



$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1}_{+} - \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot (-1)}_{-} = 5$$



## Вспомним тему: Алгебраические дополнения и миноры

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

В квадратной матрице  $n$ -го порядка рассмотрим элемент  $a_{ij}$ .

Вычеркнем  $i$ -ю строку и  $j$ -ый столбец, на пересечении которых стоит элемент  $a_{ij}$ . В результате получается матрица  $(n-1)$ -го порядка.

**Минором  $M_{ij}$**  к элементу  $a_{ij}$  матрицы  $n$ -го порядка называется определитель матрицы  $(n-1)$ -го порядка, полученной из исходной матрицы вычеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

**Алгебраическим дополнением  $A_{ij}$**  к элементу  $a_{ij}$  матрицы  $n$ -го порядка называется его минор, взятый со знаком «+», если сумма  $i+j$  четная, и со знаком «-», если сумма нечетная:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

**Пример.** Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

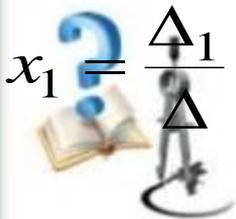
**Решение.** 1) Определитель матрицы системы:  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

2) Вычислим определители  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

3) Подставим полученные значения в формулу Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1$$





## Вспомним тему : умножение матриц

Произведением матрицы  $A$  размера  $m \times n$  на матрицу  $B$  размера  $n \times k$  есть матрица  $C$  размера  $m \times k$ , каждый элемент которой вычисляется по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} \cdot b_{sj}.$$

$\left. \begin{array}{l} \dim A = m \times n \\ \dim B = n \times k \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C = A \cdot B \text{ – существует} \\ \dim C = m \times k \end{array}$

**Вывод:** число столбцов первого множителя должно равняться числу строк второго множителя.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$c_{11} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 3$$

$$c_{12} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 11$$



**Пример.** Решить систему матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

**ОБОЗНАЧИМ**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**1. Вычислим определитель матрицы**

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$



### 3. Вычисляем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 & -0,4 \\ -0,6 & 0,2 & 0,2 \\ -0,2 & -0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

### 4. Проверка: $A^{-1}A = AA^{-1} = E$

$$A^{-1}A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = E$$



## Вспомним тему : Обратная матрица

Матрица  $A$  является **невырожденной (неособенной)**, если  $|A| \neq 0$ , иначе матрица называется **вырожденной (особенной)**.

Матрица  $A^{-1}$  называется **обратной матрицей** к квадратной матрице  $A$ , если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

алгебраические  
дополнения к элементам  
строки записаны в  
столбец

**Пример.** Найти матрицу обратную к матрице:  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**Решение.**

**1. Вычислим определитель матрицы**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

определитель матрицы не равен нулю, значит обратная матрица существует

**2. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы**

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

## 2. Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы и составим обратную матрицу

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

## 3. Решение системы

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$



## Пример.

Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 5x - 2y + 4z = 5 \\ 2x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

## Решение:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} I + II \times (-2) \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} II + I \times (-2) \\ III + I \times (-3) \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 23 & -16 & 30 \end{array} \right)$$

*Римскими цифрами I, II, III обозначим номера строк системы*

$$\begin{array}{l} III - II \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & 19 & -13 & 25 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} II + III \times (-5) \\ \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} III + II \times 4 \\ \\ \\ \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -8 & 6 & -9 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array} \right)$$

Восстановим систему:

$$\begin{cases} x - 8y + 6z = -9 \\ y - 2z = 0 \\ 5z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 + 8y - 6z \\ y = 2z = 2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 + 16 - 6 = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 1 \quad y = 2 \quad z = 1}$$

# Исследование систем линейных уравнений

**Теорема Кронекера - Капелли.** Для того, чтобы система линейных алгебраических уравнений была **совместна** (имела решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенной матрицы системы равнялся рангу матрицы коэффициентов:

$$r(Ap) = r(A)$$

Если  $r(Ap) \neq r(A)$ , то система **несовместна** (не имеет решений).

Если  $r(Ap) = r(A) = n$  (числу неизвестных), то система **совместна и определена** (имеет единственное решение).

Если  $r(Ap) = r(A) < n$ , то система **совместна и неопределенна** (имеет бесконечное множество решений):



# Бесконечное множество решений:

$$r(Ap) = r(A) < n$$

Система имеет  $r$  базисных переменных и  $n - r$  свободных переменных.

**Общее решение системы** запишется в виде:

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ \dots \\ x_r(t_1, \dots, t_{n-r}) \\ t_1 \\ \dots \\ t_{n-r} \end{pmatrix}$$



**Базисные переменные,**  
зависящие от свободных  
переменных

**Свободные  
переменные**

$$t_1 = x_{r+1}; \quad t_2 = x_{r+2}; \quad \dots \quad t_{n-r} = x_n$$

# Ранг матрицы

Рассмотрим прямоугольную матрицу размерностью  $(m \times n)$ .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{1n} \\ a_{32} & a_{3n} \end{vmatrix}$$

Выделим в этой матрице  $k$  произвольных строк и  $k$  произвольных столбцов. Элементы матрицы  $A$ , стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют определитель  $k$  - того порядка.

**Минором**  $k$ -го порядка матрицы  $A$  называют определитель, полученный из  $A$  выделением произвольных  $k$  строк и  $k$  столбцов.

**Рангом** матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Матрица  $A$  имеет 4 минора 3 - его порядка, например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -20$$

18 миноров 2 - го порядка, например:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

12 миноров 1 - го порядка – сами элементы.

Наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы равен 3, поэтому:  $r(A) = 3$

**Базисным минором** называется определитель, порядок которого равен рангу матрицы. Он может быть не единственным.

## Теорема.

Эквивалентные преобразования не меняют ранга матрицы.

### *Эквивалентные преобразования:*

- Умножение или деление элементов одного ряда на одно и то же число, не равное нулю
- Перестановка местами двух рядов
- Прибавление к элементам ряда элементов другого параллельного ряда, умноженного на произвольный множитель
- Вычеркивание нулевого ряда



**Ранг** матрицы равен числу ненулевых строк матрицы, приведенной к треугольному виду.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \text{I}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} + \text{II} \times (-2)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

Два ряда матрицы называются **линейно зависимыми**, если их линейная комбинация с коэффициентами, не все из которых равны нулю, дает нулевой ряд.  
В противном случае ряды называются **линейно независимыми**.

**Теорема.**

**Ранг** матрицы равен числу линейно независимых рядов



**Пример.** Решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

**Решение**

$$A_p = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & | & \\ 2 & 2 & 2 & | & 4 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 3 & 3 & -1 & | & 2 \\ -1 & -1 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{I:2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 3 & 3 & -1 & | & 2 \\ -1 & -1 & 3 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{II} - \text{I} \\ \text{III} + \text{I} \times (-3) \\ \text{IV} + \text{I}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & -4 & | & -4 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{II} \times (-2) + \text{III} \\ \text{II} \times 2 + \text{IV}}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & -4 & | & -4 \\ 0 & 0 & 4 & | & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & | & \\ 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$r(A_p) = r(A) = 2 \Rightarrow \text{совместна}$$

$$r(A_p) < n \Rightarrow \text{неопределенна}$$

2 базисных переменных, т.к.  $r = 2$  например,  $x_1, x_3$

1 свободная переменная, т.к.  $n - r = 3 - 2 = 1$  например,  $x_2 = t$   
Восстановим систему:

$$\begin{cases} x_1 + t + x_3 = 2 \\ -2x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - t - x_3 = 1 - t \\ x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \end{cases}$$



## Решить однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{II} + \text{I} \times (-2) \\ \text{III} + \text{I} \times (-3) \\ \sim \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{III} - \text{II} \\ \sim \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \text{II} \times (-1) \\ \sim \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -14 & -15 \end{pmatrix}$$

$$r(A) = 2$$

$$n = 4$$



**множество решений**

$$n - r = 4 - 2 = 2 \quad \text{- число свободных переменных}$$

